2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

2.1. Характеристика потоков отказов и восстановлений

При анализе надежности важным этапом является четкая формулировка критерия отказа. Отсутствие полных сведений о воздействии на систему или на его отдельный элемент приводит к вероятностному характеру отказов. Сам факт отказа – явление детерминированное, а время его появления – величина случайная. Поэтому основным математическим аппаратом теории надежности является теория вероятности и математическая статистика.

Для современных систем автоматизации характерны потоки отказов и восстановлений как последовательная смена состояний объектов во времени. Необходимо отметить, что слово *«поток»* не означает наличие большого количества отказов. Данный термин применяется при изучении закономерностей появления случайных событий. Современные же технические системы отличаются высокой надежностью и отказы для них крайне редкие события. В то же время изучение природы возникновения отказов, прогнозирование поведения системы при отказах отдельных элементов, определение параметров надежности систем является в настоящее время важной задачей, направленной на повышение эффективности и обеспечение безопасности сложных технических систем.

Под *потоком событий* понимается такая последовательность событий, при которой они происходят одно за другим в случайные моменты времени. Основными потоками событий, изучаемыми в теории надежности, являются *потоки отказов* и *восстановлений*. Наибольшее применение получили *простейшие потоки* и *потоки Эрланга*.

Простейшим потоком событий называется поток, удовлетворяющий условиям *стационарности, ординарности и отсутствия последствий*.

Стационарность потоков отказов означает, что вероятность появления определенного числа отказов за определенный промежуток времени не зависит от того, на какой момент данного промежутка приходятся эти отказы, а зависит только от длительности промежутка, т.е. плотность потока появления отказов постоянна во времени.

Ординарным считается такой поток, в котором вероятность появления одновременно двух и более отказов за небольшой промежуток времени крайне мала по сравнению с вероятностью возникновения одного отказа.

Отсутствие последствий означает, что вероятность возникновения фиксированного числа отказов на определенном интервале времени не зависит от того, сколько отказов возникло ранее. Другими словами отказы являются событиями случайными и независящими друг от друга.

Поток Пальма – стационарный ординарный поток однородных событий, для которого число событий в интервале Δt не зависит от чисел событий в любых интервалах, не пересекающихся с Δt. Если поток Пальма характеризуется постоянным параметром распределения λ, то такой поток является простейшим и описывается распределением Пуассона.

Поток отказов элементов сложных систем достаточно часто являются нестационарными. Нестационарный поток, удовлетворяющий одновременно условиям ординарности и отсутствия последствий называется нестационарным потоком Пуассона. Такие потоки характерны в периоды приработки системы и при работе элементов сложной системы не одновременно.

Нарушение условий стационарности или наличие последствий приводит к тому, что поток перестает быть простейшим. Один из видов не простейшего потока – *потоки Эрланга*.

Потоком Эрланга k-го порядка называется поток, получившийся в результате сохранения каждого k-го события в простейшем потоке. Т.е. в простейшем потоке отмечаются только k-е события, а остальные отбрасываются, в результате получается новый поток событий (Поток Эрланга).

В случае $k = 1$ поток Эрланга превращается в простейший. С увеличением числа k последствия возрастают. При $k \to \infty$ поток приближается к регулярному потоку с постоянным интервалом между событиями.

Дифференциальный закон распределения потока Эрланга следующий:

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$$

Интенсивность отказов при потоке Эрланга:

$$\lambda_k = \frac{\lambda}{k}$$

Математическое ожидание времени между событиями (наработка до/на отказа):

$$M(T_k) = T_k = \frac{1}{\lambda_k}$$

2.2. Основные виды законов распределения случайных величин, используемых в теории надежности

Надежность технологической системы зависит от множества фактов и явлений. Математические модели надежности, используемые на практике, представляют собой простые законы распределения, выражаемые элементарными функциями или интегралами от этих функций. Показатели надежности при этом являются некоторыми функциями математической модели; их определение, как правило, включает три этапа:

- установление типа модели (закона распределения);
- оценка параметров распределения;
- определение показателей надежности на основании модели.

При построении моделей и определении параметров надежности используют опытные данные или физико-статистическую теорию. Распределения, применяемые в качестве моделей надежности, бывают дискретными и непрерывными. Теория вероятностей дает широкий выбор различных законов распределения случайных величин, которые могут быть использованы и для решения задач надежности.

Дискретной (прерывной) называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенной вероятностью.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Примером дискретных случайных величин являются: число отказов или число восстановленных объектов за заданное время. Пример непрерывных случайных величин – наработка объекта до отказа, наработка между отказами, время восстановления ресурсов и т.д. В связи с этим распределения, применяемые в качестве моделей надежности, бывают дискретными и непрерывными.

Для задания дискретной случайной величины необходимо задать не только значения этих величин, но и вероятности. Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями и их вероятностями, которое может быть задано таблично (таблица 3), аналитически и графически.

Таблица 3 – Табличная форма задания закона распределения дискретной случайной величины

X	X_1	X_2	…	X_n
P	P_1	P_2	…	P_n

В случае когда величина X приняла все возможные значения, сумма вероятностей равна или стремится к 1.

Законы распределения для дискретных величин

1. Биноминальный закон Бернулли

Это распределение числа n появлений некоторого события A в m опытах. Если вероятность появления события A в одном опыте равна P, то вероятность появления n событий в m опытах:

$$Q_m^n = C_m^n Q^n (1-Q)^{m-n},$$

где C_m^n – число сочетаний из m по n.

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Свойства биноминального закона:

а) математическое ожидание числа событий в m опытах:

$$M[m] = m \cdot P.$$

б) среднеквадратическое отклонение числа событий в m опытах:

$$\sigma = \sqrt{m \cdot P(t) Q(t)}.$$

2. Закон Пуассона

Это распределение числа событий n за время t.

$$Q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Свойства закона Пуассона:

а) математическое ожидание числа событий за время t:

$$M[n] = \lambda \cdot t .$$

б) среднеквадратическое отклонение числа событий за время t:

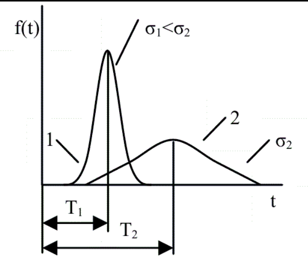
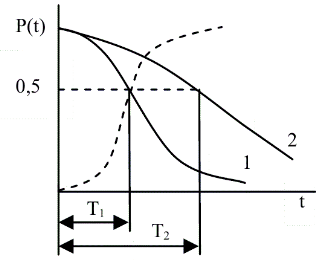
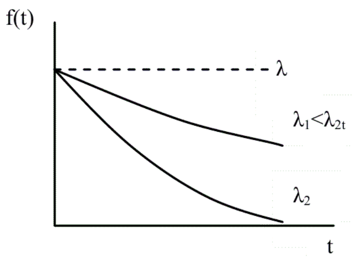
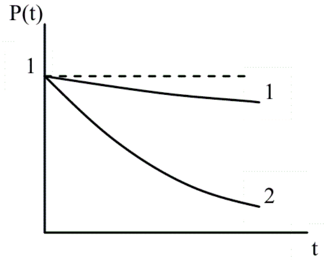
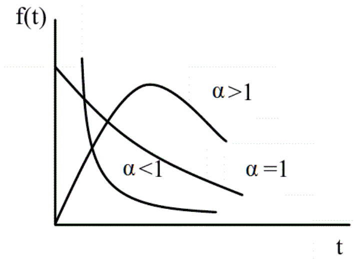
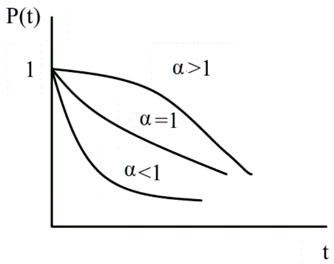
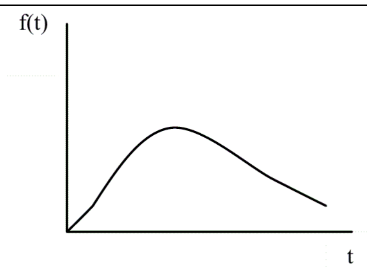
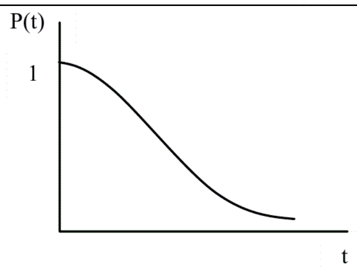
$$\sigma = \sqrt{\lambda t} .$$

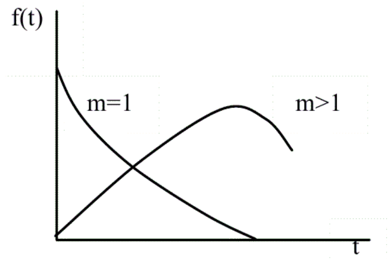
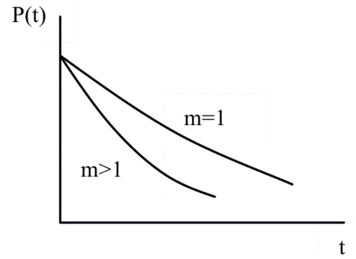
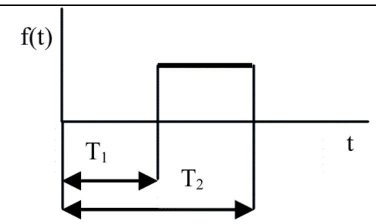
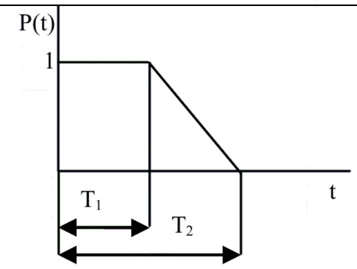
Распределение Пуассона соответствует простейшему закону отказов (отсутствует закономерность между отказами, т.е. отказы независимы).

Законы распределения для непрерывных величин

К непрерывным случайным величинам могут быть отнесены наработка на отказ, наработка между двумя отказами, время восстановления, ресурс. В таблице 4 приведены законы распределения, получившие наибольшее применение в теории надежности.

Таблица 4 – Типовые характеристики основных законов распределения

Закон	Частота отказов $f(t)$	Вероятности $P(t)$ и $Q(t)$
Нормальный (Гаусса)		
Экспоненциальный (показательный)		
Вейбулла		
Релея		

Гаммма-распределение		
Равномерное распределение		

1. Нормальный закон распределения (распределение Гаусса) характерен для естественных природных явлений и процессов. Например, следующие случайные величины хорошо моделируются нормальным распределением: погрешности измерения; размера и форм деталей; точности стрельбы и т.д.

Плотность вероятности (частота) отказов:

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Она зависит от двух параметров: среднего значения времени работы до отказа T_0 и среднеквадратичного отклонения наработки на отказ σ. Плотность нормального распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно среднего значения T_0.

Вероятность безотказной работы

$$P(t)=0,5-\Phi(z)=0,5-\Phi\left(\frac{t-T_0}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – табулированная функция Лапласа (табл. 5).

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

где x – положительное целое или дробное число.

Таблица 5 – Значения функции Лапласа

x	***Φ(x)***	***x***	***Φ(x)***	***x***	***Φ(x)***	***x***	***Φ(x)***	***x***	***Φ(x)***	***x***	***Φ(x)***
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960

0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

Свойства функции Лапласа:

- $\Phi(0) = 0$;
- $\Phi(\infty) = 0{,}5$;
- $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Вероятность попадания времени работы до отказа T_0 в заданный интервал значений от t_1 до t_2 вычисляют по формуле

$$P\left(t_1 < T_0 < t_2\right) = \Phi\left(\frac{t_2 - T_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t_1 - T_0}{\sigma}\right).$$

Интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{1}{(0{,}5 - \Phi(t))\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальный закон рекомендуется применять при постепенных отказах, особенно тогда, когда начальное значение параметра имеет большую дисперсию, а его изменение во времени протекает достаточно стабильно.

2. Экспоненциальный закон распределение характеризует время безотказной работы большого числа элементов. В первую очередь это относится к элементам радиоэлектронной аппаратуры, а также к машинам, эксплуатируемым в период после окончания приработки и до существенного проявления постепенных отказов. Оно используется в задачах массового обслуживания, в которых речь идет об интервалах времени между телефонными звонками, или между моментами поступления техники в ремонтную мастерскую, или между моментами обращения клиентов.

Экспоненциальный закон является однопараметрическим, удобным для расчетов надежности, особенно для сложных расчлененных систем, и широко применяется при решении различных задач. Для этого закона используют формулы:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t};$$
$$P(t) = e^{-\lambda t};$$
$$\lambda = const.$$

Экспоненциальное распределение хорошо описывает случай, когда вероятность отказа не зависит от длительности предыдущего использования изделия, т.е. когда возникают в основном внезапные, а не постепенные отказы.

3. Закону Вейбулла хорошо подчиняется распределение отказов в объектах, содержащих большое количество однотипных неремонтируемых элементов (полупроводниковых приборов, микромодулей и т. д.).

Согласно распределению Вейбулла, плотность распределения вероятности безотказной работы (частота отказов) определяется по формуле

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}},$$

где α и β – параметры формы и масштаба.

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}}.$$

Средняя наработка до отказа:

$$T_0 = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right).$$

где $\Gamma(z)$ – табулированная гамма-функция (табл. 6).

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

где z – положительное целое или дробное число.

Таблица 6 – Значения гамма-функции

z	$\Gamma(z)$	z	$\Gamma(z)$	z	$\Gamma(z)$	z	$\Gamma(z)$
1,00	1,0000	1,25	0,9064	1,50	0,8862	1,75	0,9191
1,01	0,9943	1,26	0,9044	1,51	0,8866	1,76	0,9214
1,02	0,9888	1,27	0,9025	1,52	0,8870	1,77	0,9238
1,03	0,9835	1,28	0,9007	1,53	0,8876	1,78	0,9262
1,04	0,9784	1,29	0,8990	1,54	0,8882	1,79	0,9288
1,05	0,9735	1,30	0,8975	1,55	0,8889	1,80	0,9314
1,06	0,9687	1,31	0,8960	1,56	0,8896	1,81	0,9341
1,07	0,9642	1,32	0,8946	1,57	0,8905	1,82	0,9368
1,08	0,9597	1,33	0,8934	1,58	0,8914	1,83	0,9397
1,09	0,9555	1,34	0,8922	1,59	0,8924	1,84	0,9426
1,10	0,9514	1,35	0,8912	1,60	0,8935	1,85	0,9456
1,11	0,9474	1,36	0,8902	1,61	0,8947	1,86	0,9187
1,12	0,9436	1,37	0,8893	1,62	0,8959	1,87	0,9518
1,13	0,9399	1,38	0,8885	1,63	0,8972	1,88	0,9551
1,14	0,9364	1,39	0,8879	1,64	0,8986	1,89	0,9584
1,15	0,9330	1,40	0,8873	1,65	0,9001	1,90	0,9618
1,16	0,9298	1,41	0,8868	1,66	0,9017	1,91	0,9652
1,17	0,9267	1,42	0,8864	1,67	0,9033	1,92	0,9688
1,18	0,9237	1,43	0,8860	1,68	0,9050	1,93	0,9724
1,19	0,9209	1,44	0,8858	1,69	0,9068	1,94	0,9761
1,20	0,9182	1,45	0,8857	1,70	0,9086	1,95	0,9799
1,21	0,9156	1,46	0,8856	1,71	0,9106	1,96	0,9837
1,22	0,9131	1,47	0,8856	1,72	0,9126	1,97	0,9877
1,23	0,9108	1,48	0,8857	1,73	0,9147	1,98	0,9917
1,24	0,9030	1,49	0,8859	1,74	0,9168	1,99	0,9959
						2,0000	1,0000

Свойства гамма-функции:

- $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$;
- $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$.
- $\Gamma(z) = (z+1)!$ для целых положительных z.

Среднеквадратическое отклонение среднего времени безотказной работы:

$$\sigma = \beta \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1}.$$

Универсальность распределения Вейбулла объясняется его коэффициентами. При $\alpha = 1$ распределение превращается в экспоненциальное, при $\alpha < 1$ функции плотности и интенсивности отказов убывающие (период приработки системы), при $\alpha > 1$ интенсивность отказов возрастающая (период старения системы). При $\alpha = 3{,}3$ распределение Вейбулла близко к нормальному, а при $\alpha = 2$ функция $\lambda(t)$ линейная и распределение Вейбулла превращается в распределение Рэлея с плотностью:

$$f(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2} .$$

4. Распределение Релея является однопараметрическим и асимметричным и удобно для описания распределения положительных случайных величин, хотя и обладает значительно меньшей универсальностью, чем предыдущее. Основные зависимости распределения Релея:

$$f(t) = \frac{t}{C^2} e^{-\frac{t^2}{2C^2}};$$

$$P(t) = e^{-\frac{t^2}{2C^2}};$$

$$\lambda(t) = \frac{t}{C^2};$$

$$T_0 = C\sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

Значение параметра распределения C полностью определяет данный закон.

5. Гамма-распределение имеет два положительных параметра – α и β. Если α целое число, это распределение иногда называют распределением Эрланга. В этом случае распределение Эрланга можно считать композицией из α независимых случайных величин, имеющих одинаковое экспоненциальное распределение с параметром β. Основные зависимости гамма-распределения:

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{t}{\beta}},$$

где α и β – параметры формы и масштаба, $\Gamma(\alpha)$ – табулированная гамма-функция.

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = \int_t^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = e^{-\frac{t}{\beta}} \cdot \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{t^i}{\beta^i i!} .$$

Средняя наработка до отказа:

$$T_0 = \alpha \cdot \beta .$$

Среднеквадратическое отклонение среднего времени безотказной работы:

$$\sigma = \beta\sqrt{\alpha} .$$

Параметр α, характеризующий асимметрию гамма-распределения, определяет вид характеристик надежности. При $\alpha > 1$ интенсивность отказа возрастает, при $\alpha < 1$ убывает, а при $\alpha = 1$ становится постоянной, т. е. гамма-распределение превращается в экспоненциальное.

6. Равномерное распределение.

При данном распределении все события (отказы) совершаются за отрезок времени от $t = T_1$ до $t = T_2$, и вероятность их появления одинакова для любых одинаковых промежутков времени внутри данного отрезка. Поэтому:

$$f(t) = \frac{1}{T_2 - T_1} = const \text{ при } T_1 \le t \le T_2;$$

$$P(t) = \frac{t - T_1}{T_2 - T_1} \text{ при } T_1 \le t \le T_2.$$

Равномерное распределение может заменить экспоненциальное при $T_1 = 0$ и значениях $P(t) > 0{,}9$ (линеаризация экспоненты).

Основная задача при расчете показателей надежности заключается в том, чтобы получить такое распределение, которое с высокой степенью достоверности отражало бы события и процессы, приводящие к отказам изделия.

2.3. Зависимости вероятностей событий

События могут быть совместными и несовместными. Два события называют несовместными, если в результате опыта они не могут появиться одновременно. И наоборот, события считаются совместными, если они появляются одновременно в результате такого опыта.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Метод полной индукции позволяет использовать теорему сложения для произвольного числа несовместных событий. Так, *вероятность суммы нескольких событий* равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1, A_2, \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n).$$

С л е д с т в и е 1. Если события A_1, A_2, ..., A_n образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_i P(A_i) = 1,$$

Противоположными событиями называют два несовместных события, образующих *полную группу.*

С л е д с т в и е 2. *Сумма вероятностей противоположных событий A* и A^* равна единице:

$$P(A) + P(A^*) = 1$$

Вероятность суммы двух совместных событий A и *B* выражается формулой

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Аналогично *вероятность суммы трех совместных событий* определяется выражением

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC).$$

Аналогичную формулу можно написать для *произведения двух событий:*

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B)$$

и для *произведения трех событий:*

$$P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(A+B+C).$$

Данные формулы находят практическое применение при преобразовании различных выражений, содержащих вероятности сумм и произведений событий. В зависимости от специфики задачи в некоторых случаях удобнее бывает использовать только суммы, а в других только произведения событий.

События могут быть независимыми и зависимыми.

Событие А называют *независимым* от события *В,* если вероятность события *А* не зависит от того, произошло событие *В* или нет.

Событие А называют *зависимым* от события *В,* если вероятность события *А* меняется в зависимости от того, произошло событие *В* или нет.

Понятие зависимости и независимости событий можно наглядно показать на следующих примерах.

Пример. Предположим, что опыт состоит в бросании двух монет, при этом рассматривают следующие события: событие *А* — появление герба на первой монете и событие *В* — появление герба на второй монете.

В этом случае вероятность события *А* не зависит от того, произошло событие *В* или нет, следовательно, событие *А* независимо от события *В*.

Пример. Пусть в урне имеется два белых и один черный шар. Два человека вынимают из урны по одному шару, при этом рассматриваются следующие события: событие *А* — появление белого шара у первого человека и событие *В* — появление белого шара у второго человека.

Вероятность события *А* до того, как станет известно что-либо о событии *В,* равна 2/3. Если стало известно, что событие *В* произошло, то вероятность события *А* становится равной 1/2, из чего заключаем, что событие *А* зависит от события *В*.

Вероятность события *А,* вычисленная при условии, что имело место другое событие *В,* называется *условной вероятностью события А* и обозначается $P(A/B)$.

Для условий примера $P(A) = 2/3$, $P(A/B) = 1/2$.

Теорема умножения вероятностей формулируется следующим образом.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место, т. е.

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

$P(AB) = P(A)P(B/A).$

Очевидно, что при применении теоремы умножения безразлично, какое из событий — *А* или *В* — считать первым, а какое вторым, и теорему можно записать так:

Два события называют *независимыми,* если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Понятие независимых событий может быть распространено на случай произвольного числа событий. *Несколько событий* называют *независимыми,* если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Теорема умножения вероятностей может быть обобщена на случай произвольного числа событий. В общем виде она формулируется так.

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляют при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1, A_2, \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2)\dots P(A_n / A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

В случае независимых событий теорема упрощается и принимает вид:

$$P(A_1, A_2, \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\dots P(A_n),$$

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Следствием обеих основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей – является *формула полной вероятности.*

Пусть требуется определить вероятность некоторого события *A,* которое может произойти вместе с одним из событий: H_1, H_2,..., H_n, образующих полную группу несовместных событий, называемых *гипотезами.*

Гипотезы H_1, H_2,..., H_n, образуют полную группу несовместных событий, поэтому событие A может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез, т. е.

$$A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA,$$

Так как гипотезы H_1, H_2,..., H_n несовместны, то и комбинации H_1A, H_2A,..., H_nA также несовместны. Применяя теорему сложения, получим для этих гипотез:

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) = \sum_i P(H_iA).$$

Применяя к событию H_iA теорему умножения, получим формулу *полной вероятности.*

$$P(A) = \sum_i P(H_i)P(A / H_i),$$

т. е. вероятность события A вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе.

Пример. По движущемуся танку производят три выстрела из артиллерийского орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5; при втором - 0,7; при третьем - 0,8. Для вывода танка из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании танк выходит из строя с вероятностью 0,3; при двух попаданиях - с вероятностью 0,9. Определить вероятность того, что в результате трех выстрелов танк выйдет из строя.

Р е ш е н и е. Рассмотрим четыре гипотезы: H_0 – в танк не попало ни одного снаряда. H_1 – в танк попал один снаряд, H_2 – в танк попало два снаряда и H_3 – в танк попало три снаряда.

Пользуясь теоремами сложения и умножения, найдем вероятности этих гипотез:

$P(H_0)$ =0,5*0,3*0,2=0,03;

$P(H_1)$=0,5*0,3*0,2+0,5*0,7*0,2+0,5*0,3*0,8=0,22;

$P(H_2)$=0,5*0,7*0,2+0,5*0,3*0,8+0,5*0,7*0,8=0,47;

$P(H_3)$=0,5*0,7*0,8=0,28.

Условные вероятности события A (выход из строя танка) при этих гипотезах равны:

$P(A/H_0) = 0$; $P(A/H_1) = 0{,}3$; $P(A/H_2) = 0{,}9$; $P(A/H_3) = 1{,}0$.

Применяя формулу полной вероятности, получим

$P(A) = P(H_0)P(A/H_0) + P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = =$ 0,03*0 + 0,22*0,3 + 0,47*0,9 + 0,28*1,0 = 0,769.

В практике применения теории вероятностей часто приходится встречаться с задачами, в которых один и тот же опыт или аналогичные опыты повторяются многократно. В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A, причем нас интересует не результат каждого отдельного опыта, а общее число появлений события A в результате серии опытов. Например, если производится группа выстрелов по одной и той же цели, то нас интересует не результат каждого выстрела, а общее число попаданий.

Если проводят m независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью P, то вероятность того, что событие появится ровно n раз в m опытах , выражается формулой Бернулли

$$P^n = C_m^n P^n (1-P)^{m-n},$$

где C_m^n – число сочетаний из m по n.

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$